

Λ4

4 | 5 | 7

Να εξετάσετε αν τα επίπεδα

$$(n_1) \quad 2x - y + 3z - 4 = 0$$

$$(n_2) \quad 6x - 3y + 9z + 6 = 0$$

είναι // παραλληλά και
αν ~~και~~ ναι, βρείτε εξίσωση μεσοπαραλληλίου
επιπέδου.

Λύση:

$$\vec{n}_1 = (2, -1, 3)$$

$$\vec{n}_2 = (6, -3, 9)$$

$$\vec{n}_2 = 3\vec{n}_1 \text{ άρα παραλληλά}$$

άρα τα $(n_1), (n_2)$ είναι παραλληλά

$$(n_1): 2x - y + 3z + \Delta = 0$$

$$\Delta = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = 1$$

$$(n_1): 2x - y + 3z + 1 = 0$$

$$P_1 (2, 0, 0) \in (n_1)$$

$$P_2 (-1, 0, 0) \in (n_2)$$

$$P_M \left(\frac{1}{2}, 0, 0 \right)$$

(A6) Δίνεται το επίπεδο (π) $x-2y+3z=0$

1) Να πρεπει ένα παραδιαι υδρεο στο (π)

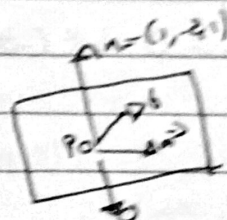
$$\vec{N} = (1, -2, 3) \quad n = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, -2, 3)$$

2) Να πρεθούν οι παραμετρικες εξισωσεις του (π)

$$\begin{cases} x = x_0 + t a_1 + s \beta_1 \\ y = y_0 + t a_2 + s \beta_2 \\ z = z_0 + t a_3 + s \beta_3 \end{cases}, t, s$$

$$y = 0 \vec{P}_0 + t \vec{a} + s \vec{\beta}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 (x_0, y_0, z) (a_1, a_2, a_3) $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$



πρεπει
να ~~πρεπει~~

ε ~~πρεπει~~
αυτε ~~πρεπει~~

δυναμικα

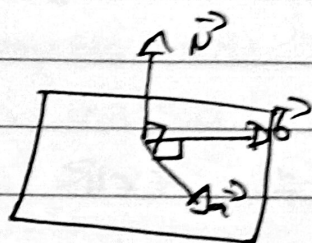
$\vec{a}, \vec{\beta}$ τα οποια

ειναι παλληδια
στο (π).

Λιον:

$$\vec{a} = (1, 0, -2)$$

$$\vec{N} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) = 0$$



1ος τροπος $\vec{b} = N \times \vec{a}$

2ος τροπος

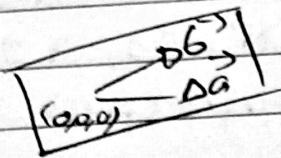
$$\begin{cases} \vec{b} \cdot \vec{N} = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{a} = 0 \end{cases} \quad \vec{b} = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} x + y(-2) + 3 \cdot 2 = 0 \\ x \cdot 1 + y \cdot 0 + (-2) \cdot 3 = 0 \end{cases}$$

$x=3 \quad x=1$ Αρα $\vec{b} = (1, 2, 1)$

$y=x$

Άρα το επίπεδο (π) διέρχεται από το $(0,0,0)$

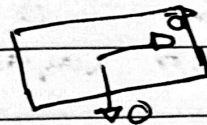


οπότε

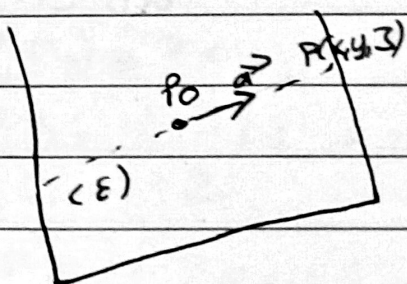
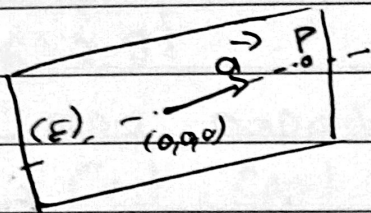
$$\begin{cases} x = 0 + t \cdot 1 + s \cdot 1 \\ y = 0 + t \cdot 0 + s \cdot 1 \\ z = 0 + t(-2) + s \cdot 1 \end{cases}$$

βρίσκεται
Α άνω στον

3) Να δοθεί παράδειγμα ευθείας που κείται
ένι τω (π)



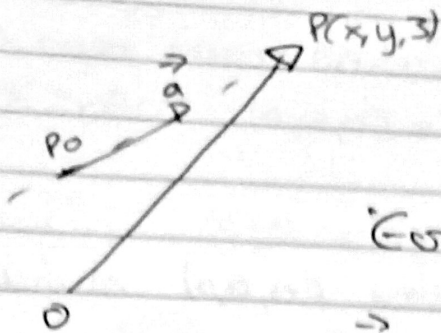
$$o\vec{P_0} + t\vec{a} = y\vec{a}$$



$$y(t) = (0,0,0) + t(1,0,-1) \quad t \in \mathbb{R}$$

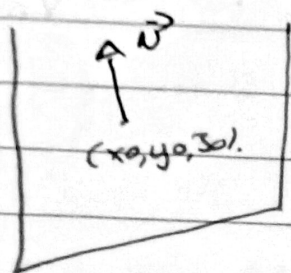
$$(x,y,z) = (0,0,0) + t(1,0,-1)$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



Έστω P τυχαίο σημείο
της ευθείας
 $\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{P_0P} = \vec{OP_0} + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}$

4) Να προσδιοριστεί ο ημιχώρος στον οποίο
βρίσκεται το σημείο $P_2(1, -1, 2)$



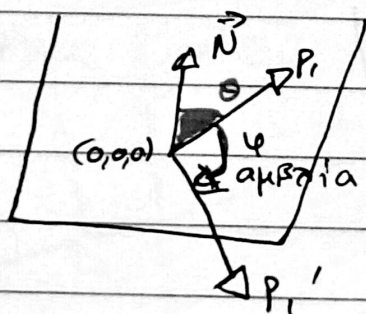
$$(n) \quad x - 2y + z = 0$$

$$\text{ορίζω } f(x, y, z) = x - 2y + z$$

Αν $(x_0, y_0, z_0) \in (n)$ τότε $f(x_0, y_0, z_0) = 0$

Στα σημεία του (n^+) η f θα είναι θετική
ενώ στα σημεία του (n^-) αρνητική

$$f(1, -1, 2) = 1 - 2(-1) + 2 = 4 > 0 \quad \text{Άρα } P_2 \in (n^+)$$



$$\vec{N} \cdot \vec{OP_1}$$

$\rightarrow$ Θετικό $\Rightarrow \theta$ οξεία $\Rightarrow P_1$ ανήκει στο Π^+

$\rightarrow$ μηδέν $\Rightarrow P_1 \in (n)$

$\rightarrow$ αρνητικό $\Rightarrow \theta$ αμβλεία $\Rightarrow P_1$ ανήκει στο Π^-

$$\vec{N} \cdot \vec{OP_1} = (1, -2, 1) \cdot (1-0, -1-0, 2-0) = 4.$$

5) Να βρεθεί η απόσταση του (π) από τα σημεία $\vec{o} = (0,0,0)$ και $P_2 = (1,0,1)$
Λύση:

$d(\vec{o}, (\pi)) = 0$ αφού το $(0,0,0)$ ανήκει στο επίπεδο
 το P_2 δεν ~~ανήκει~~ ανήκει στην εξίσωση του επιπέδου. Άρα.

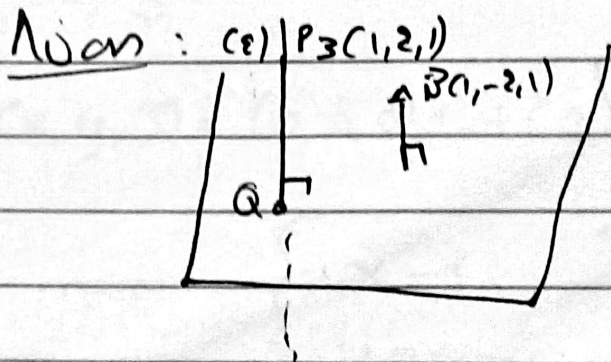
$$d(P_2, (\pi)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{9}{\sqrt{6}}$$

$$(A, B, C) = (1, -2, 1)$$

$$(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$$

$$D = 0.$$

6) Να βρεθεί το σημείο τμήσης του (π) και της κάθετης προς αυτό ευθείας (ϵ) η οποία διέρχεται από το σημείο $P_3(1, 2, 1)$.



$$(\pi): x - 2y + 3 = 0$$

Ένα διάνυσμα κάθετο στο (ε) είναι
το $\vec{N} = (1, -2, 1)$

→ συμμετρική
Εξίσωση
Ευθείας

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{1}$$

$$(\vec{y} = \vec{OP_0} + t(1, -2, 1), t \in \mathbb{R})$$

$(1, 2, 1)$ διευκρινιστική

Για να βρούμε το σημείο τομής Q λύουμε το
σύστημα

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{1} = t \\ x-2y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ y-2=-2t \\ z-1=t \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας και βρίσκω t

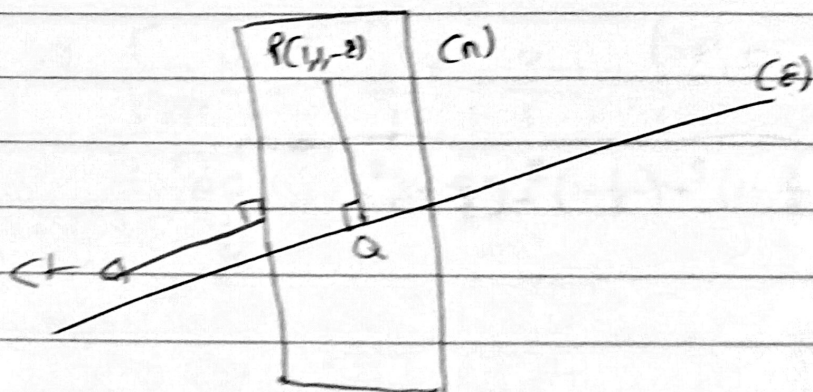
οπότε $x=4/3, y=4/3, z=4/3$ $Q(4/3, 4/3, 4/3)$

A7

Να βρεθεί η απόσταση του σημείου

$P(1, 1, -2)$ από την ευθεία (ε)

$$\begin{cases} 2x-4y-3 \\ -y-2z+6=0 \end{cases} \begin{matrix} \vec{n}_1 = (2, -4, 0) \\ \vec{n}_2 = (0, 1, 2) \end{matrix}$$



Ένα
κατάλληλο
διάνυσμα
στον
επίπεδο
θα είναι
⊥ στο
επίπεδο

ΙΔΕΑ: Θα βρούμε επίπεδο (π) που διέρχεται από το $P(1, 1, -2)$ και είναι κάθετο στην ευθεία (ϵ) . Μετά, θα βρούμε το σημείο τομής Q των $(\epsilon), (\pi)$, άρα η απόσταση απόσταση θα είναι $|PQ|$

Το $\vec{a} = (2, -4, 0) \times (0, 1, -2)$
 είναι παράλληλο " $(8, 4, 2) = 2(4, 2, 1)$

Άρα $(\epsilon) \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$

Το επίπεδο (π) θα είναι της μορφής
 $4x + 2y + z + \Delta = 0$

$P(1, 1, -2) \in (\pi) \Rightarrow 4 + 2 - 2 + \Delta = 0$

$\Delta = -4$

Για το Q λύνουμε το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} (\epsilon) \left\{ \begin{array}{l} 2x - 4y = 3 \rightarrow \text{λύνω ως προς } x \\ y - 2z + 5 = 0 \rightarrow \text{λύνω ως προς } z \end{array} \right. \\ 4x + 2y + z - 4 = 0 \end{array} \right.$$

$Q \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3} \right)$

ΟΠΟΤΕ

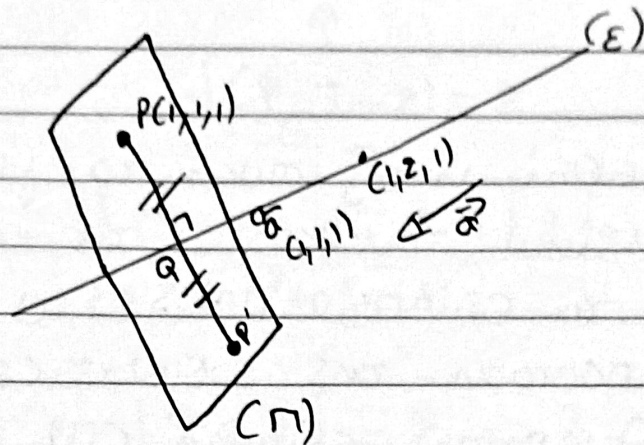
$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{5}{6} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{7}{3} + 2\right)^2} = \frac{\sqrt{74}}{6}$

A10) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $P(1,1,1)$ ως προς την ευθεία (E) .

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1} \quad (E)$$

παράμ. ευθ $\alpha = 1 \quad 1 \quad 1$

Άρα το σημείο $(1,2,1)$ ανήκει στην ευθεία και το διάνυσμα $\vec{a} = (1,1,1)$ είναι παράλληλο σε αυτή.



Ας βρούμε το επίπεδο (π) που περνά από το $(1,2,1)$ είναι κάθετο στην ευθεία (E) .

Άρα $\vec{n} = \vec{a} = (1,1,1)$

Οπότε $(\pi) = x + y + z + \Delta = 0$

ήρα $\Delta = -3$

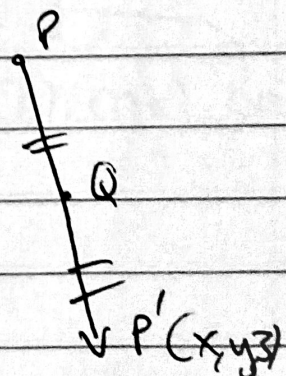
$(\pi): x + y + z = 3$

Q $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1} = t \\ x + y + z = 3 \end{array} \right.$

~~x = t + 1~~ $x = t + 1$ $3t + 4 = 3$
 $y = t + 2$ $3t = -1$
 $z = t + 1$ $t = -1/3$

$x = 2/3$

$y = 5/3 \quad z = 2/3$



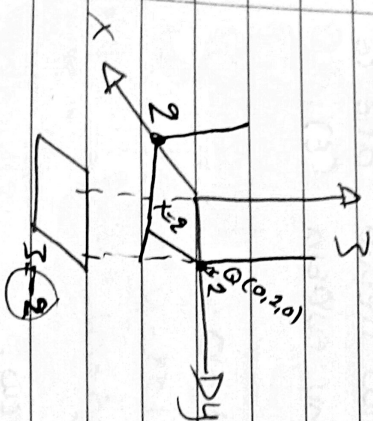
$$\vec{PO} = \vec{OP'}$$

$$P'(2/3, 2/3, 2/3)$$

$$C_2) \text{ Βρείτε την απόσταση του } P \text{ από την}$$

$$C_1) \quad d(P, C_1) = \frac{|\vec{PO}|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

A.18] Να βρεθεί η εξίσωση του πεπερασμένου - του απείρου του κύβου τα οποία ανέρχου από το επίπεδο $C_1) 5 + 2 = 0$ απόσταση 1 με την απόσταση της ευθείας $C_2): (x, y, z) = (0, 1, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ από το επίπεδο $C_1) x = 2$ και κείται στα Θ του κύβου του $C_1)$.



$$d(P, C_1) = d(C_2, C_1)$$

$$C_2) \quad \begin{cases} x=0 \rightarrow \text{επίπεδο στο } \mathbb{R}^3 \\ y=1 \rightarrow \text{''} \end{cases}$$

Για $\lambda=0$ το $\Theta(0,1,0)$ ανήκει στην ευθεία $C_1)$. Άρα

$$d(C_2, C_1) = d(O, C_1) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$(n_1): x=2 \Leftrightarrow 1x+0y+0z-2=0$$

$$d(Q, (n_1)) = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = 2$$

Αρα ψάχνω $P(x, y, z)$ ώστε

$$0x + 0y + 1z + 2 = 0$$

↑

$$d(P, (n_1)) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{|0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + 2|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = 2$$

$$\Rightarrow |z + 2| = 2 \Rightarrow \underbrace{z = 0}_{\text{αυστηρά}} \text{ ή } \underbrace{z = -4}_{\text{αύστη } z = 0}$$

$$f(x, y, z) = z + 2$$

Για $z=0$ το $Q(0, 1, 0)$ ανήκει στην ευθεία (ε)

Αρα

$$d((ε), (n_1)) = d(Q, (n_1)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + d|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{για } z=0 \quad f(x, y, 0) = 0 + 2 = 2$$

άρα τα $z=0$ ανήκουν στα θετικά ημίσωπα του (n_1)

β) Να προσδιορίσει η απόσταση της (ε)

από το $(n_2): x + y + z = 0$

(Θα εξετάσω αν τέμνεται, γιατί αν τέμνεται τότε $d((ε), (n_2)) = 0$).

Το σημείο $(0, 2, -2)$ ανήκει στα $(ε), (n_2)$ οπότε

Μαθηματικά
Σταθολίδου

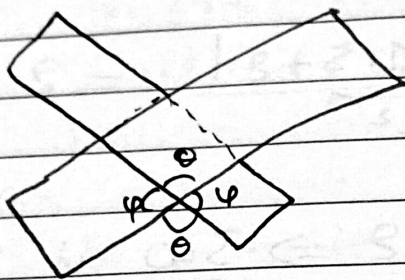
Άσκηση 22

Δίνονται τα επίπεδα:

$$(π_1): x + 2y + 3z - 4 = 0$$

και $(π_2): 5x + z = 3$

α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των επιπέδων που διχοτομούν τις δύο διεδρες γωνίες των $(π_1), (π_2)$



$$\vec{n}_1 = (1, 2, 3)$$

$$\vec{n}_2 = (5, 0, 1)$$

$\vec{n}_1 \neq \vec{n}_2$. Άρα τέμνονται τα επίπεδα.

$$\text{Αφού } \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle \neq 0$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$$

ΔΕΝ τέμνονται κάθετα άρα σχηματίζονται
2 διεδρες γωνίες φ, θ

Αν λoιπον $P(x, y, z)$ ανήκει στο $(π_3)$

ή $(π_4)$ τότε $d(P, π_1) = d(P, π_2)$

$$\Rightarrow \frac{|1 \cdot x + 2y + 3z - 4|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|5x + z - 3|}{\sqrt{25+1}}$$

$$\Rightarrow x + 2y + 3z - 4 = \pm \sqrt{\frac{13}{7}} (5x + z - 3)$$

ΟΠΩΣΤΕ βρήκαμε τις εξισώσεις των διχοτομικών επιπέδων
Μαθητ. Σταυρίδης (π₃, π₄)

β) Να προσδιορίσετε την ελάχιστη του ενέργεια που δίνεται τα διεθνή δυναμικά του $(\text{CH}_3, \text{CH}_2)$ αν θεωρήσουμε ότι το $\text{H}(\text{C}_{11}, -1)$ βρίσκεται στο $\text{C}(\text{C}_{11}, -1)$.